EXERCICE N°3 : 30' 6 points

1°) Soient f et g les fonctions définies sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\ln(1+x)-x$ et $g(x)=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}$.

a) Etudier le sens de variation de f et g sur $[0,+\infty[$.

b) En déduire que pour tout x de $[0,+\infty[$, $x-\frac{x^2}{2}\le\ln(1+x)\le x$.

2°) Soit (U_n) la suite définie sur IN^* par : $U_1=\frac{3}{2}$ et pour tout n de IN^*, $U_{n+1}=U_n\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$.

a) Montrer que pour tout n de IN^*, $U_n>0$.

b) Montrer que pour tout n de IN^*, $\ln(U_n)=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$.

3°) On pose $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k$ et $T_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^k$.

Montrer que $S_n-\frac{1}{2}T_n\le\ln(U_n)\le S_n$.

4°) a) Calculer S_n et T_n en fonction de n.

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}T_n$.

5°) a) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

b) En déduire que la suite (U_n) converge vers un réel $\mathcal{L}$.

c) Montrer que $\ln(2)\le\ln(\ell)\le 1$ et en déduire un encadrement de $\mathcal{L}$.

EXERCICE N°4 : 30' 6 points

Soit la fonction g définie sur $]1,+\infty[$ par $g(x)=\frac{x}{x-1}+\ln(x-1)$.

On note (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. (unité graphique étant 2cm)

1) a) Montrer que g est dérivable sur $]1,+\infty[$ et que $g'(x)=\frac{x-2}{(x-1)^2}$

b) Etablir le tableau de variation de la fonction g.

2) a) Montrer que l'équation $g(x)=3$ admet exactement deux solutions α et β dans $]1,+\infty[$.

b) On suppose que $\alpha<\beta$. Vérifier que $1<\alpha<\frac{3}{2}$

3) Etudier les branches infinies de (Γ).

4) Montrer que la courbe (Γ) admet un unique point d'inflexion I que l'on précisera.

5) Tracer la courbe (Γ).

6) a) Montrer que $\int_2^{e+1}\frac{x}{x-1}dx=e$

b) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par (Γ), $\Delta: y=x$ et les droites $x=2$ et $x=e+1$.

Qarray.tn - Aqra Blech - Qarray.tn